Übersicht von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Erläuterungen

Auf Seite 4 sind einige der unzähligen Wahrscheinlichkeitsverteilungen samt ihrer Eigenschaften und Verbindungen untereinander aufgeführt. Dabei sind stetige Verteilungen in den Boxen mit abgerundeten Ecken dargestellt bzw. diskrete Verteilungen in eckigen Boxen.

Blau hervorgehoben sind die Verteilungen, die man wohl häufiger mal braucht, dabei gibt es nach Klick auf den Namen mehr Informationen zu den jeweiligen Verteilungen, insbesondere die Bedeutung und Wertebereiche der Parametern, die jeweils in runden Klammern hinter der Verteilung stehen.

Eigenschaften der Verteilungen

Unter der Verteilung stehen einige Buchstaben, die Abkürzung für folgende Eigenschaften sind:

F: Faltungseigenschaft. Diese Eigenschaft bedeutet, dass die Summe von unabhängigen Zufallsgrößen einer Verteilung zur selben Verteilung gehört. So gilt beispielsweise für unabhängige $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, dass

$$Y = X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Die Summe ist also erneut normalverteilt. Weil man die Verteilung einer Summe von unabhängigen Zufallsgrößen normalerweise mit der Faltung bestimmt, wird diese Eigenschaft entsprechend als Faltungseigenschaft bezeichnet. Mehr zur Faltung gibt es auch unter http://massmatics.de/merkzettel/912/.

L: Lineare Transformation. Unter der linearen Transformation einer Zufallsgröße X versteht man den Ausdruck

$$aX + b$$

mit $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Gehört die Verteilung von $Y = aX + b$ zur selben Verteilungsklasse, wie die von X, so sagt man X ist stabil bei linearen Transformationen bzw. sind diese Verteilungen mit einem L gekennzeichnet.

Min: Wenn das Minimum von Zufallsgrößen erneut dieselbe Verteilung besitzt, so erfüllt die Verteilung die Minimums-Eigenschaft. Beispielsweise gilt für die Exponentialverteilung, dass mit $X_1, \ldots, X_n$ und $X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda_i)$:

$$Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\} \sim \ \mathrm{Exp}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$$

Max: Analog gibt es auch Verteilungen, die diese Eigenschaft erfüllen, wenn man das Maximum bildet. Folglich wurden diese mit „Max“ gekennzeichnet.

V: Vielfache. Gehört die Zufallsgröße $Y = aX$ für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zur selben Verteilung wie X, so ist dies mit V gekennzeichnet. Wenn man eine Verteilung, hat, die nur für positive Werte definiert ist, wie etwa die Exponentialverteilung, so muss man a entsprechend auch auf positive Werte einschränken.

P: Produkt. Mit P sind die Verteilungen markiert, bei denen das Produkt von unabhängigen Zufallsgrößen erneut zur selben Verteilung gehört, wie die einzelnen Faktoren. Beispielsweise gilt für zwei Log-Normalverteilte Größen $X_1 \sim$ Log-N(μ_1, σ_1^2) und $X_2 \sim$ Log-N(μ_2, σ_2^2), dass

$$Y = X_1 \cdot X_2 \sim \ \text{Log-N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

I: Inverse. Verteilungen bei denen $\frac{1}{X}$ zur gleichen Verteilung wie X gehört sind mit I gekennzeichnet. So gilt für $X \sim \mathrm{F}(m, n)$, dass

$$Y = \frac{1}{X} \sim \ \mathrm{F}(n, m)$$

G: Gedächtnislosigkeit. Folgt X einer Verteilung, die gedächtnislos ist, so gilt für die bedingte Wahrscheinlichkeit mit $s, t > 0$:

$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t)$$

Unter den diskreten Verteilungen ist das nur für die geometrische Verteilung gegeben, bei den stetigen Verteilungen ist die Exponentialverteilung die einzige, die diese Eigenschaft erfüllt. Mehr dazu auch unter http://massmatics.de/merkzettel/909/.

Gelegentlich steht an den Buchstaben der obigen Eigenschaften auch noch ein Index. So z.Bsp. bei der Binomialverteilung mit F_p. Dieser soll verdeutlichen, dass die Eigenschaft nur gilt, wenn man den Parameter p der Verteilung fest hält. So ist die Faltung von binomialverteilten Größen X_1 und X_2 nur dann wieder eine binomialverteilte Zufallsgröße, wenn beide denselben Parameterwert für p haben.

Beziehungen

In der Grafik sind drei Arten von Beziehungen unter den Verteilungen markiert. Mit schwarzen Linien sind Verbindungen markiert, die man über eine Transformation herstellen kann. Beispielsweise gilt für die normalverteilte Zufallsgröße X, dass e^X Log-Normalverteilt ist, daher zeigt ein schwarzer Pfeil von der Normalverteilung auf die Log-Normalverteilung. Die entsprechende Transformation ist neben dem Pfeil angegeben.

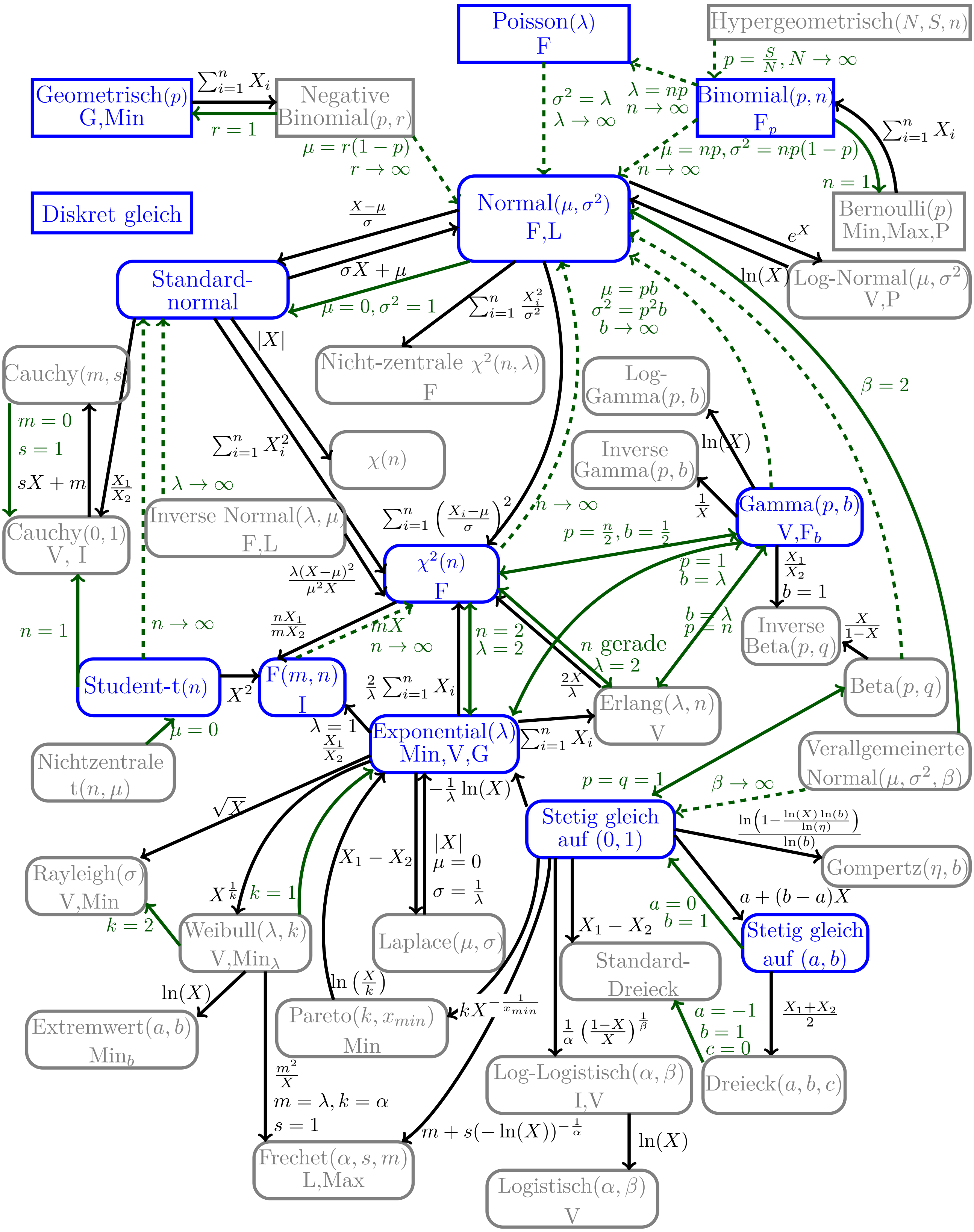
Dabei wurde versucht das ohnehin unübersichtliche Bild nicht ganz im Pfeilwirrwarr untergehen zu lassen, sodass einige Verbindungen nicht aufgeführt wurden. Beispielsweise gilt für die F-verteilte Zufallsgröße $X \sim \mathrm{F}(m, n)$, dass

$$Y = \frac{mX}{n + mX} \sim \text{ Beta}\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$$

Grün markiert sind Spezialfälle. Beispielsweise ist die Exponentialverteilung ein Spezialfall der Gammaverteilung für $p = 1$ und $b = \lambda$. Diese Parameterwahl ist dementsprechend (auch in grün) neben dem Pfeil angegeben.

Grün gestrichelt sind Spezialfälle die als Grenzwerte eintreten. So geht die Binomialverteilung beispielsweise in die Normalverteilung über, wenn n gegen unendlich geht. Die Parameter μ und σ^2 der Normalverteilung bildet man dann mit $\mu = np$ und $\sigma^2 = np(1-p)$. Diese Zusammenhänge kann man oft für Approximationen nutzen, wie auch bei Binomial- und Normalverteilung. Mehr dazu kann man auch unter http://massmatics.de/merkzettel/919/ nachlesen.

Nicht extra aufgeführt ist dabei der Zusammenhang, den man in so gut wie allen Fällen über den zentralen Grenzwertsatz bilden kann. Schließlich besitzen alle aufgeführten Verteilungen (bis auf Cauchy, Student-t und F-Verteilung) stets ein endliches erstes und zweites Moment, sodass die Summe von unabhängigen Zufallsgrößen einer bestimmten Verteilung gegen die Normalverteilung konvergiert, wenn die Anzahl der Summanden gegen unendlich geht. Siehe dazu auch unter http://massmatics.de/merkzettel/921/.



Poisson(λ) F
Hypergeometrisch(N, S, n)
$p = \frac{S}{N}, N \to \infty$
Geometrisch(p) G,Min
$\sum_{i=1}^n X_i$
Negative Binomial(p, r)
$r = 1$
$\sigma^2 = \lambda$
$\lambda \to \infty$
$\lambda = np$
$n \to \infty$
Binomial(p, n) F_p
$\sum_{i=1}^n X_i$
$\mu = r(1-p)$
$r \to \infty$
$\mu = np, \sigma^2 = np(1-p)$
$n \to \infty$
$n = 1$
Diskret gleich
Normal(μ, σ^2) F,L
Bernoulli(p) Min,Max,P
$\frac{X-\mu}{\sigma}$
e^X
$\sigma X + \mu$
$\ln(X)$
Log-Normal(μ, σ^2) V,P
Standard-normal
$\mu = 0, \sigma^2 = 1$
$\sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{\sigma^2}$
$\mu = pb$
$\sigma^2 = p^2 b$
$b \to \infty$
$|X|$
Nicht-zentrale $\chi^2(n, \lambda)$ F
Cauchy(m, s)
Log-Gamma(p, b)
$\beta = 2$
$m = 0$
$s = 1$
$\chi(n)$
$\sum_{i=1}^n X_i^2$
Inverse Gamma(p, b)
$\ln(X)$
$sX + m$
$\frac{X_1}{X_2}$
$\lambda \to \infty$
$\frac{1}{X}$
Gamma(p, b) V,F_b
Cauchy(0, 1) V, I
Inverse Normal(λ, μ) F,L
$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$
$n \to \infty$
$p = \frac{n}{2}, b = \frac{1}{2}$
$\chi^2(n)$ F
$\frac{\lambda(X-\mu)^2}{\mu^2 X}$
$p = 1$
$b = \lambda$
$\frac{X_1}{X_2}$
$b = 1$
$n = 1$
$n \to \infty$
$\frac{nX_1}{mX_2}$
mX
$n \to \infty$
$n = 2$
$\lambda = 2$
n gerade
$\lambda = 2$
$b = \lambda$
$p = n$
Inverse Beta(p, q)
$\frac{X}{1-X}$
Student-t(n)
F(m, n) I
X^2
$\frac{2}{\lambda}\sum_{i=1}^n X_i$
$\frac{2X}{\lambda}$
Erlang(λ, n) V
Beta(p, q)
$\mu = 0$
$\lambda = 1$
$\frac{X_1}{X_2}$
Exponential(λ) Min,V,G
$\sum_{i=1}^n X_i$
Nichtzentrale t(n, μ)
Verallgemeinerte Normal(μ, σ^2, β)
$-\frac{1}{\lambda}\ln(X)$
$p = q = 1$
$\beta \to \infty$
$\sqrt{X}$
Stetig gleich auf $(0, 1)$
$\ln\left(1-\frac{\ln(X)\ln(b)}{\ln(\eta)}\right)$
$\ln(b)$
$|X|$
$\mu = 0$
$\sigma = \frac{1}{\lambda}$
$X_1 - X_2$
Gompertz(η, b)
Rayleigh(σ) V,Min
$X^{\frac{1}{k}}$
$k = 1$
$a + (b-a)X$
$k = 2$
Weibull(λ, k) V,Min_λ
Laplace(μ, σ)
$X_1 - X_2$
$a = 0$
$b = 1$
Stetig gleich auf (a, b)
Standard-Dreieck
$\ln(X)$
$\ln\left(\frac{X}{k}\right)$
Extremwert(a, b) Min_b
Pareto(k, x_{min}) Min
$kX^{-\frac{1}{x_{min}}}$
$a = -1$
$b = 1$
$c = 0$
$\frac{X_1+X_2}{2}$
$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1-X}{X}\right)^{\frac{1}{\beta}}$
$\frac{m^2}{X}$
$m = \lambda, k = \alpha$
$s = 1$
Log-Logistisch(α, β) I,V
Dreieck(a, b, c)
$m + s(-\ln(X))^{-\frac{1}{\alpha}}$
$\ln(X)$
Frechet(α, s, m) L,Max
Logistisch(α, β) V